Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу, Србија
http://www.pmf.ni.ac.rs/mii
Математика и информатика 2(4) (2015), 49-72

Од површине троугла до одређеног интеграла

Жарко Ђурић
Париске комуне 14-2/18, Врање
zarkocr@gmail.com

1. УВОД

У 3. разреду средње школе ученици се упознају са формулом за израчунавање површине троугла ако су дата његова темена са координатама у правоуглом координатном систему.

Ако треба израчунати површину многоугла који је дат са координатама својих темена,онда тај многоугао делимо на троуглове, и површину многоугла добијамо као збир површина тих троуглова.

Поставља се питање да ли постоји формула помоћу које бисмо могли израчунати површину многоугла, не делећи тај многоугао на троуглове. Одговор је потврдан. И не само то, показаћемо примену ове формуле у решавању неких проблема из нумеричке и математичке анализе.

2. ПОВРШИНА ТРОУГЛА

Нека је у равни *Oxy* дат троугао $A_1A_2A_3$ одређен координатама својих тачака $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$. Интензитет векторског производа $\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}$ једнак је по дефиницији површини паралелограма конструисаног над векторима $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$. Зато је површина троугла $A_1A_2A_3$ једнака P=$\frac{1}{2}$ $\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right|$, односно

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|.$$

Докажимо следеће тврђење:

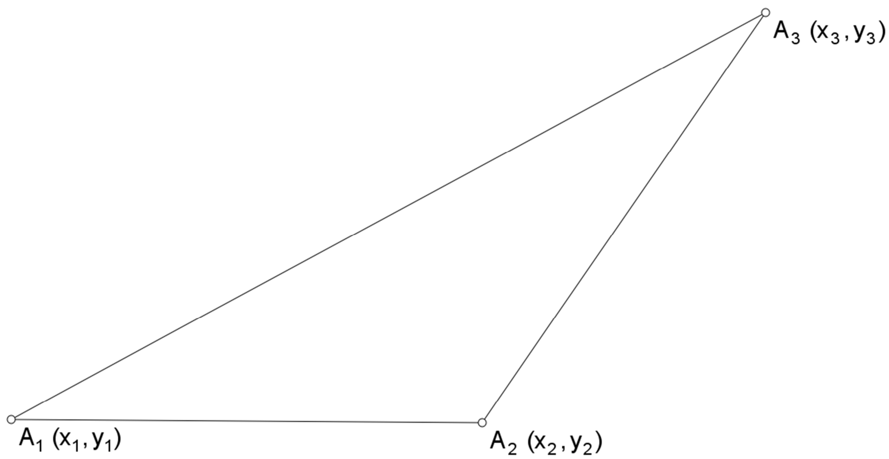
Нека је у равни *Oxy* дат троугао $A_1A_2A_3$ одређен координатама својих тачака $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ и нека је са тачкама A_1, A_2 и A_3 тим редом позитивно оријентисан. Тада је:

$P = \frac{1}{2}\left(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right)$, или

$P = -\frac{1}{2}(y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2))$, односно

$\left(x_1\left(y_2-y_3\right)+x_2\left(y_3-y_1\right)+x_3\left(y_1-y_2\right)\right)>0$, или $-(y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2))>0$

Уколико је наведени троугао $A_1A_2A_3$ негативно оријентисан, тада $\left(x_1\left(y_2-y_3\right)+x_2\left(y_3-y_1\right)+x_3\left(y_1-y_2\right)\right)<0$,или $-(y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)) < 0$ односно $P < 0$.



Слика 1

Доказ:
Нека је $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,0)$, $\overrightarrow{A_1A_3}(x_3-x_1,y_3-y_1,0)$ и $A_1A_2A_3$ позитивно оријентисан троугао, тада је:

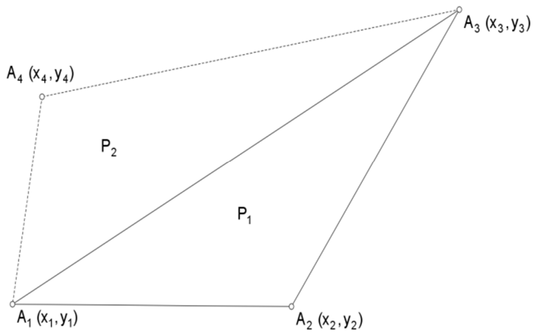
$\vec{c}=\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=((x_2-x_1)\vec{\imath}+(y_2-y_1)\vec{\jmath}+0\cdot\vec{k})\times((x_3-x_1)\vec{\imath}+(y_3-y_1)\vec{\jmath}+0\cdot\vec{k})$ и добија се: $\vec{c}=\left(x_1\left(y_2-y_3\right)+x_2\left(y_3-y_1\right)+x_3\left(y_1-y_2\right)\right)\vec{k}$. Вектори $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, и $\vec{c}$ тим редом чине десни систем вектора, па је број $\left(x_1\left(y_2-y_3\right)+x_2\left(y_3-y_1\right)+x_3\left(y_1-y_2\right)\right)$ уз $\vec{k}$ позитиван. Израз $-(y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2))$ је еквивалентан претходном изразу.

Уколико је наведени троугао негативно оријентисан, тада вектор $\vec{c}$ има смер супротан вектору $\vec{k}$. То значи да је број $\left(x_1\left(y_2-y_3\right)+x_2\left(y_3-y_1\right)+x_3\left(y_1-y_2\right)\right)<0$, а по апсолутној вредности једнак двострукој вредности површине наведеног троугла.

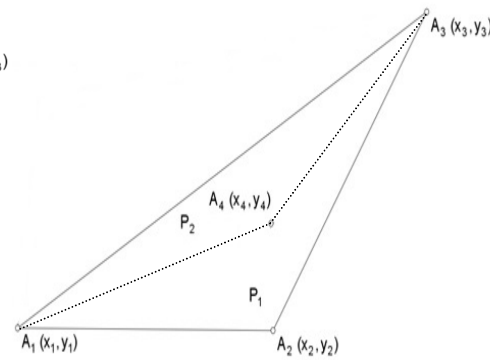
3. ПОВРШИНА МНОГОУГЛА

Узмимо произвољну тачку A_4, различиту од тачака A_1, A_2, A_3. Њих можемо тако означити да четвороугао $A_1A_2A_3A_4$ буде позитивно оријентисан. Посматрајмо троуглове $\Delta A_1A_2A_3$ и $\Delta A_3A_4A_1$.

Нека су: $P_1=\frac{1}{2}(x_1(y_2\text{-}y_3)+x_2(y_3\text{-}y_1)+x_3(y_1\text{-}y_2))$ и $P_2=\frac{1}{2}(x_3(y_4\text{-}y_1)+x_4(y_1\text{-}y_3)+x_1(y_3\text{-}y_4))$.



Слика 2.а



Слика 2.б

Тачка A_4 може бити ван троугла $\Delta A_1A_2A_3$, или унутар њега. Ако је ван њега, онда су и $\Delta A_1A_2A_3$, и $\Delta A_3A_4A_1$ позитивно оријентисани, слика 2.а, па су $P_1=\frac{1}{2}(x_1(y_2\text{-}y_3)+x_2(y_3\text{-}y_1)+x_3(y_1\text{-}y_2))$ и $P_2=\frac{1}{2}(x_3(y_4\text{-}y_1)+x_4(y_1\text{-}y_3)+x_1(y_3\text{-}y_4))$ позитивни бројеви. Дакле, површина четвороугла $A_1A_2A_3A_4$ је $P=P_1+P_2=\frac{1}{2}(x_1(y_2\text{-}y_3)+x_2(y_3\text{-}y_1)+x_3(y_1\text{-}y_2))$ $+\frac{1}{2}(x_3(y_4\text{-}y_1)+x_4(y_1\text{-}y_3)+x_1(y_3\text{-}y_4))=\frac{1}{2}(x_1(y_2\text{-}y_4)+x_2(y_3\text{-}y_1)+x_3(y_4\text{-}y_2)+x_4(y_1\text{-}y_3))$.

Ако је тачка A_4 унутар троугла, онда је $\Delta A_1A_2A_3$ позитивно оријентисан, а $\Delta A_3A_4A_1$ негативно оријентисан, слика 2.б, а то значи да је P_1 позитиван број и P_2 негативан. Одатле произилази да је $P=P_1+P_2$, па долазимо до исте формуле.

Тврђење:
Нека је дат позитивно оријентисан многоугао $A_1A_2...A_n$ са координатама $A_i(x_i,y_i)$, $i=1\ldots n$. За дати многоугао показаћемо да важе следеће формуле:

(1) $\boldsymbol{P_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k(y_{k+1}\text{-}y_{k-1}),\quad y_0 = y_n,\ y_{n+1} = y_1}$, или

(2) $\boldsymbol{P_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} y_k(x_{k+1}\text{-}x_{k-1}),\ x_0 = x_n,\ x_{n+1} = x_1}$**.**

Доказ:
Показано је да за позитивно оријентисан троугао важи формула:

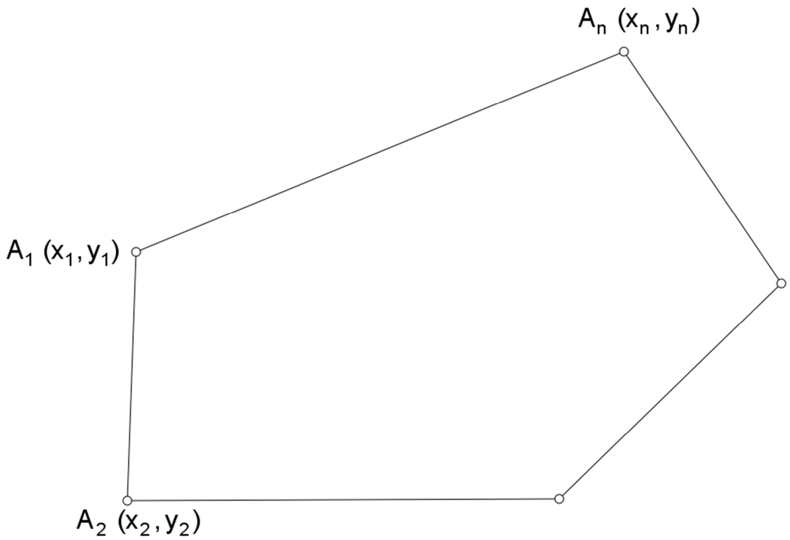
$P=\frac{1}{2}\left(x_1\left(y_2-y_3\right)+x_2\left(y_3-y_1\right)+x_3\left(y_1-y_2\right)\right)$, што је посебан случај формуле

$P_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k(y_{k+1}\text{-}y_{k-1})$, $y_0 = y_n$, $y_{n+1} = y_1$ за $n=3$.

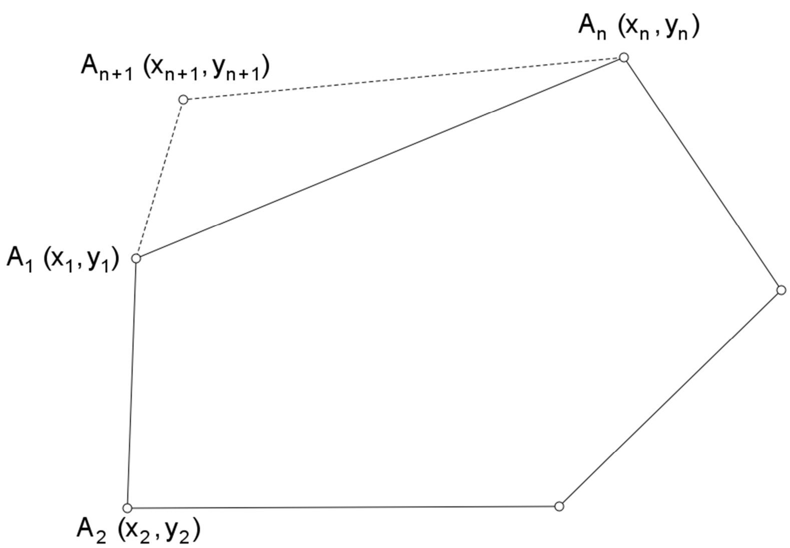
Претпоставимо да за неко n важи формула

$P_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k(y_{k+1}-y_{k-1})$, $y_0 = y_n$, $y_{n+1} = y_1$, или другачије записана

$2P_n = x_1(y_2-y_n)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_n(y_1-y_{n-1})$ за многоугао $A_1A_2...A_n$. Видети слику 3.



Слика 3



Слика 4

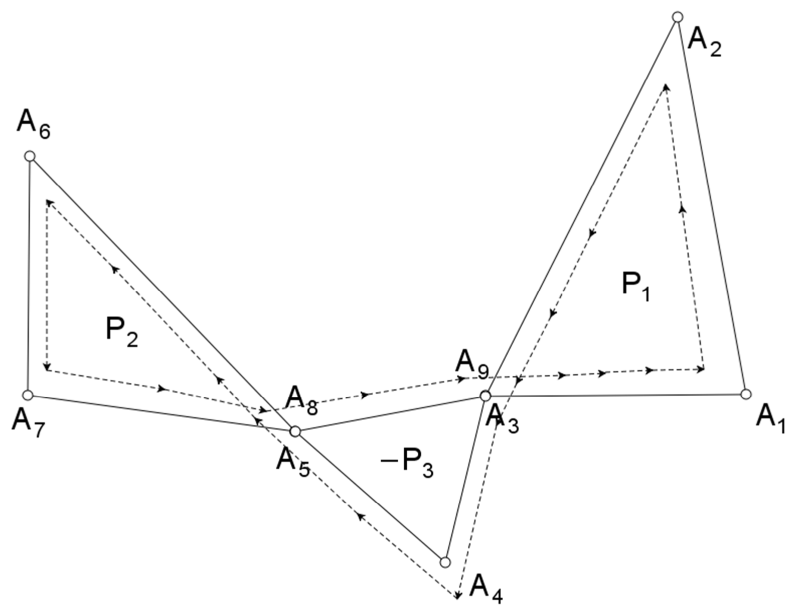
Нека је P_n претходни израз, $P_\Delta=x_n(y_{n+1}-y_1)+x_{n+1}(y_1-y_n)+x_1(y_n-y_{n+1})$ и A_{n+1} ван многоугла. За многоугао $A_1A_2\cdots A_nA_{n+1}$ са слике 4 површина P_{n+1} биће једнака збиру површина P_n многоугла $A_1A_2\cdots A_n$ и површине P_Δ троугла $A_nA_{n+1}A_1$ који је позитивно оријентисан, тј.

$$2P_{n+1}=2P_n+2P_\Delta=(x_1(y_2-y_n)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_n(y_1-y_{n-1}))+(x_n(y_{n+1}-y_1)+x_{n+1}(y_1-y_n)+x_1(y_n-y_{n+1}))$$
$$=x_1(y_2-y_n)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_n(y_1-y_{n-1})+x_n(y_{n+1}-y_1)+x_{n+1}(y_1-y_n)+x_1(y_n-y_{n+1})$$
$$=(x_1(y_2-y_n)+x_1(y_n-y_{n+1}))+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_{n-1}(y_n-y_{n-2})+x_{n+1}(y_1-y_n)+(x_n(y_1-y_{n-1})+x_n(y_{n+1}-y_1))$$
$$= x_1(y_2-y_{n+1})+ x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_{n-1}(y_n-y_{n-2})+x_n(y_{n+1}-y_{n-1})+x_{n+1}(y_1-y_n).$$

Ако је тачка A_{n+1} унутар многоугла, тада је $\Delta A_nA_{n+1}A_1$ негативно оријентисан и $P_\Delta<0$, па је опет $2P_{n+1}=2P_n+2P_\Delta$. Формула (2) добија се непосредно из формуле (1). (**Напомена:** Полигонална линија не мора да буде проста.)

Ако применимо формулу (1) или (2) на фигуре са слике 5 и 6 које су само различито оријентисане добићемо различите резултате.

P_1, P_2, P_3 су површине одговарајућих површи (слике 5 и 6). P је резултат који се добија применом формуле (1), односно (2) на претходне фигуре .



P=P$_1$+P$_2$+(-P$_3$)

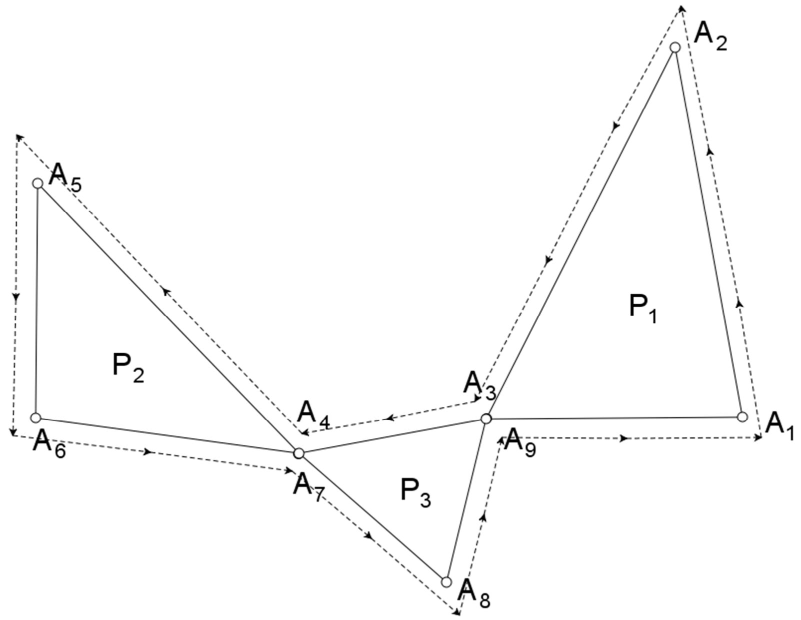
Слика 5

Ако имамо два позитивно оријенатисана четвороугла $A_1A_2A_3A_4$ и $A_4A_5A_6A_1$ са заједничком страницом A_4A_1 и нека су P_1 и P_2 њихове површине тим редом, а P збир тих површина тада је:

$$2P=2P_1+2P_2=(x_1(y_2-y_4)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_4-y_2)+x_4(y_1-y_3))+(x_4(y_5-y_1)+x_5(y_6-y_4)+x_6(y_1-y_5)+x_1(y_4-y_6))$$

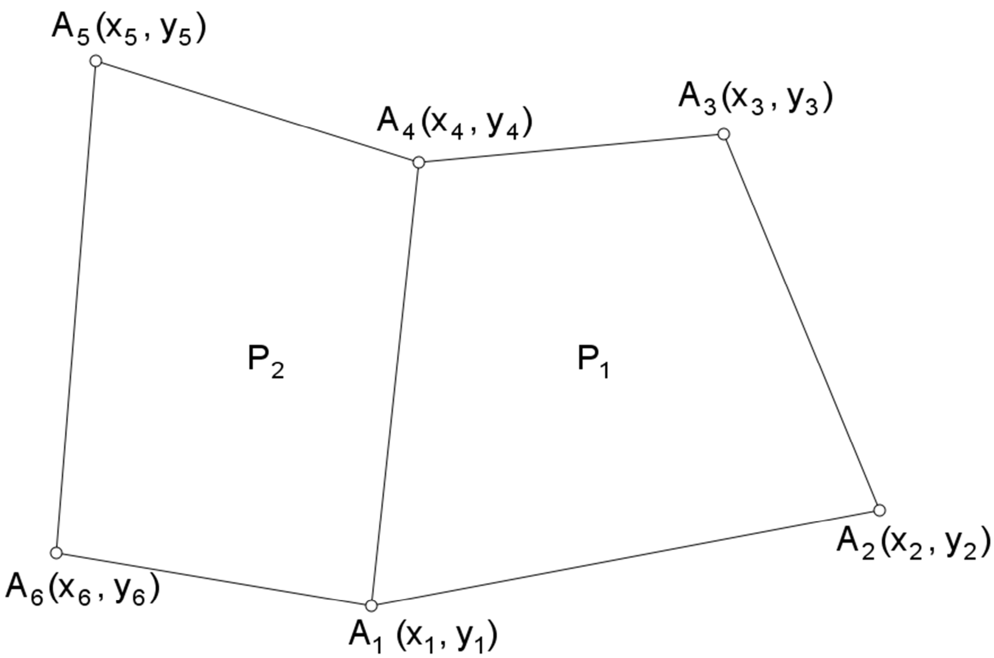
$$2P=x_1(y_2-y_6)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_4-y_2)+x_4(y_5-y_3)+x_5(y_6-y_4)+x_6(y_1-y_5).$$

Дакле, добијамо резултат површине многоугла $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.



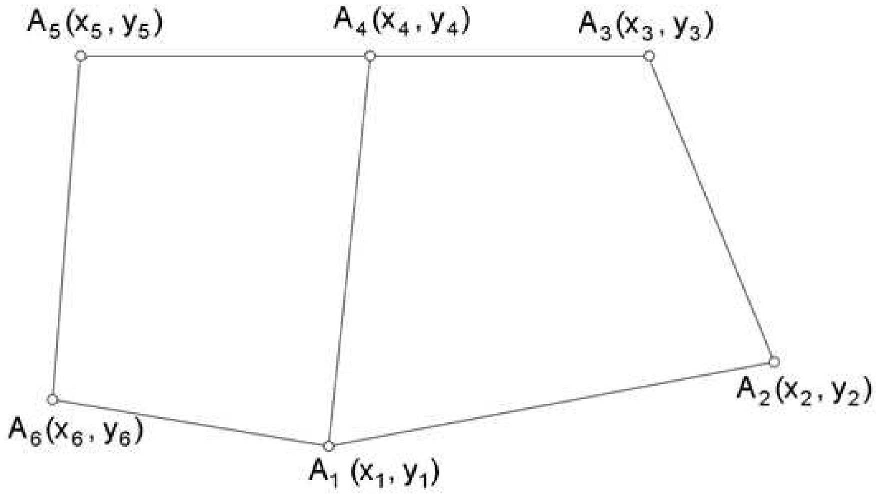
$P=P_1+P_2+P_3$

Слика 6

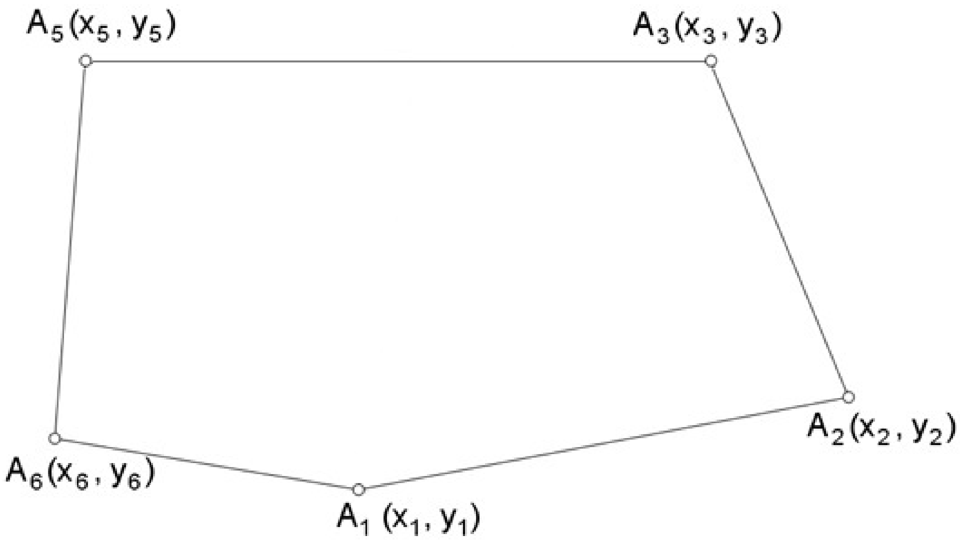


Слика 7

Применом претходног и формула (1) или (2) примећујемо да уколико у некој фигури имамо више колинеарних тачака, онда тачке између ,,ишчезавају”, односно можемо их изоставити. Видети слике 8 и 9.



Слика 8



Слика 9

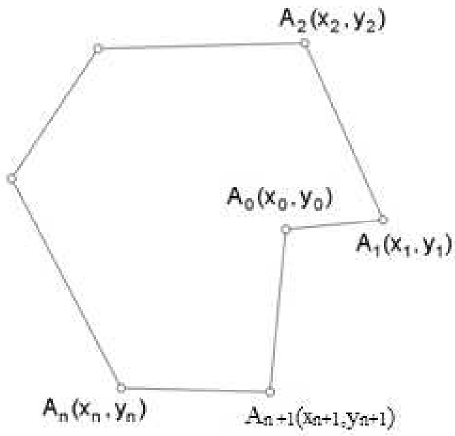
3. ЈОШ НЕКА РАЗМАТРАЊА ПОВРШИНЕ МНОГОУГЛА

Ако применимо формулу (1) на фигуру са слике 10.а добићемо:

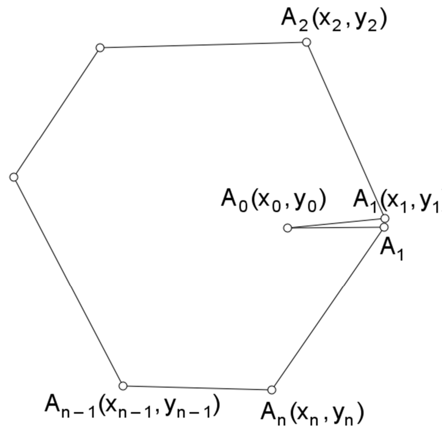
$$2P=x_0(y_1-y_{n+1})+x_1(y_2-y_0)+\ldots+x_n(y_{n+1}-y_{n-1})+x_{n+1}(y_0-y_n)$$

Уколико приближавамо тачку A_{n+1} тачки A_1(слика 10.а) тако да дође до њиховог поклапања, тачка A_0 ишчезава из формуле. Видети слику 10.б.

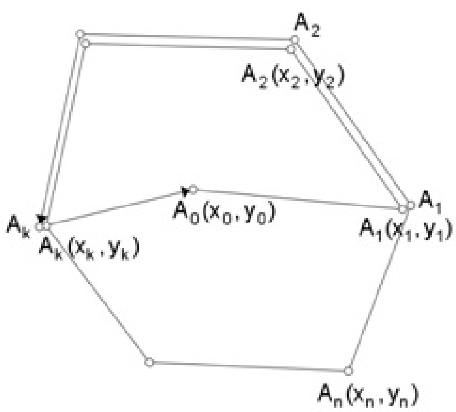
$$\begin{aligned}2P &= x_0(y_1-y_1)+x_1(y_2-y_0)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_{n-1}(y_n-y_{n-2})+x_n(y_1-y_{n-1})+x_1(y_0-y_n)\\ &= x_1(y_2-y_0+y_0-y_n)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_{n-1}(y_n-y_{n-2})+x_n(y_1-y_{n-1})\\ &= x_1(y_2-y_n)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_{n-1}(y_n-y_{n-2})+x_n(y_1-y_{n-1}).\end{aligned}$$



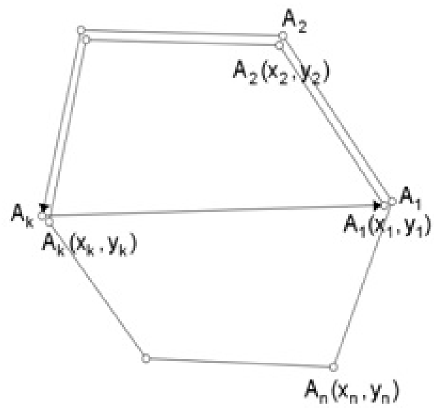
Слика 10.a



Слика 10.б



Слика 11.a



Слика 11.б

Ако применимо формулу (1) на фигуру са слике 11.а добијамо:

$$2P = x_0(y_1-y_k)+x_1(y_2-y_0)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_n(y_1-y_{n-1})+x_1(y_2-y_n)+x_2(y_3-y_1)+\ldots+x_k(y_0-y_{k-1})$$

(3) $\boldsymbol{2P = x_1(y_2-y_n)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_n(y_1-y_{n-1})+x_0(y_1-y_k)+x_1(y_2-y_0)+x_2(y_3-y_1)+\ldots+x_k(y_0-y_{k-1})}$

Ако применимо исту формулу на фигуру са слике 11.б и ако је $A_0(x_0,y_0)=A_1(x_1,y_1)$ тада имамо:

$$2P=(x_1(y_2-y_n)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_n(y_1-y_{n-1}))+(x_1(y_1-y_k)+x_1(y_2-y_1)+x_2(y_3-y_1)+\ldots+x_k(y_1-y_{k-1}))$$

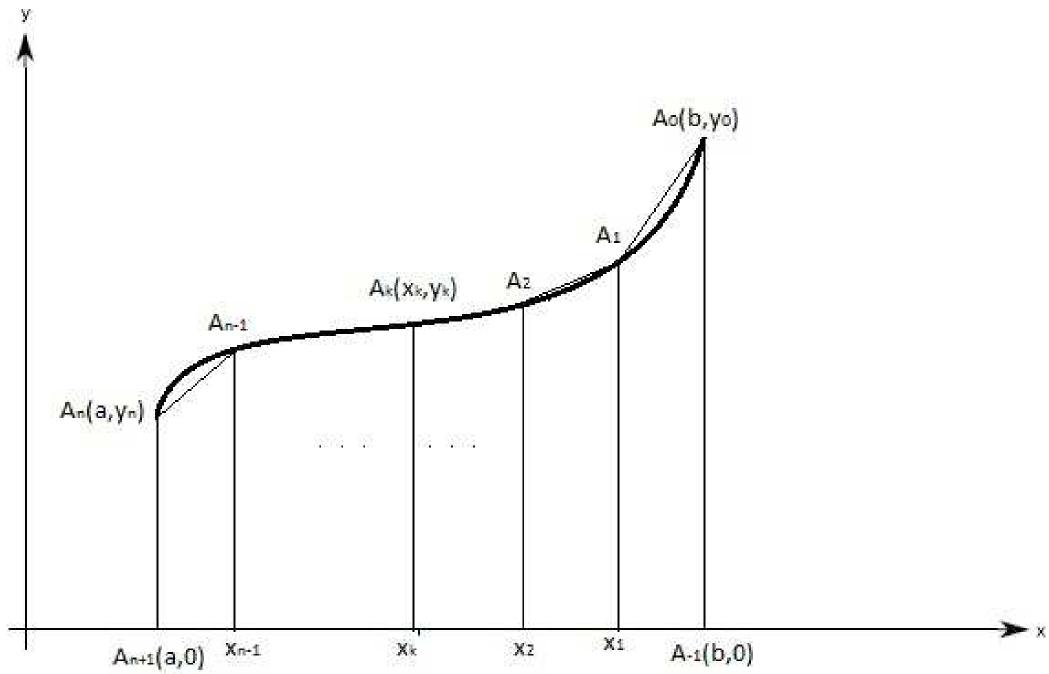
(4) $\boldsymbol{2P = (x_1(y_2-y_n)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_n(y_1-y_{n-1}))+(x_1(y_2-y_k)+x_2(y_3-y_1)+\ldots+x_k(y_1-y_{k-1}))}$

Ова разматрања су значајна за израчунавање површине неких равних фигура. Наиме, коришћењем граничне вредности и горе наведених формула и идеја проблем се уопштава и могу се извести изрази за рачунање површина разних фигура, што ће бити подробније објашњено у наставку под насловом ,,Површине неких равних фигура”.

4. ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

Под криволинијским трапезом у равни *Oxy* подразумевамо фигуру која је ограничена кривом $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, правим линијама $x=a$, $x=b$ и x-осом.

Овде ћемо претпоставити да је функција $y=f(x)$ интеграбилна у Римановом смислу (види литературу [5], стр. 106-107; [6], стр. 200-204).



Слика 12

У криволинијски трапез упишимо многоугао $A_{-1}A_0A_1\ldots A_nA_{n+1}$ као на слици 12. Површина P криволинијског трапеза приближно је једнака површини наведеног многоугла. Површина P_n наведеног многоугла према формулама (1) и (2) дата је формулама:

$$\textbf{(5)}\ 2P_n = x_n(y_{n+1}-y_{n-1})+x_{n+1}(y_{-1}-y_n)+x_{-1}(y_0-y_{n+1})+x_0(y_1-y_{-1})+\sum_{k=1}^{n-1} x_k(y_{k+1}-y_{k-1}),$$

односно

$$\textbf{(6)}\ 2P_n = -y_n(x_{n+1}-x_{n-1})-y_{n+1}(x_{-1}-x_n)-y_{-1}(x_0-x_{n+1})-y_0(x_1-x_{-1})-\sum_{k=1}^{n-1} y_k(x_{k+1}-x_{k-1})$$

(**Напомена:** $y_{n+1}=y_{-1}=0$)

P_n у изразу (5), односно (6), је омеђено доњом интегралном сумом s_n, односно горњом S_n, тј. $s_n\le P_n\le S_n$ (Видети литературу [5], стр. 104-106). Нека је $d_k=x_k-x_{k-1}$ и нека је $d=max(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ и $d\to 0$.

Како је $\lim\limits_{d \to 0} s_n = \lim\limits_{d \to 0} S_n = P$, где је P површина криволинијског трапеза, то је $P = \lim\limits_{d \to 0} P_n$ (литература [1], стр. 250, својство 2).

5. ТРАПЕЗНА ФОРМУЛА

У многим практичним проблемима израчунавање интеграла се може извршити само приближним методама. Једна од тих метода је трапезна формула. Користећи формулу (2) показаћемо како се долази до истоимене формуле. Ово извођење се разликује од извођења која се често срећу у литератури.

Приликом овог извођења користићемо слику 12. Подела интервала [a,b] је извршена тачкама x_k где је $k=0\ldots n$, на n једнаких подинтервала.

Нека је $x_{k+1}-x_k = -h$ односно $x_{k+1}-x_{k-1} = -2h$. Тада је

$$2P_n = -y_n(x_{n+1}-x_{n-1})-0(x_{-1}-x_n -0(x_0-x_{n+1})-y_0(x_1-x_{-1})-\sum_{k=1}^{n-1} y_k(x_{k+1}-x_{k-1})$$

$$= -y_n(-h)-y_0(-h)-\sum_{k=1}^{n-1} y_k(-2h)$$

$$= y_0h+y_nh+2h\sum_{k=1}^{n-1} y_k$$

$$=h(y_0+y_n+2\sum_{k=1}^{n-1} y_k).$$

Добијамо општу трапезну формулу:

(7) $\int_a^b ydx \approx \boldsymbol{P_n} = \frac{h}{2}(\boldsymbol{y_0}+\boldsymbol{y_n}+\mathbf{2}\sum_{k=1}^{n-1}\boldsymbol{y_k})$ са грешком $\boldsymbol{R} = -\frac{b-a}{12}\boldsymbol{h^2y''}(\xi) \quad \xi\in[a,b]$

(**Напомена:** $\boldsymbol{R} = -\frac{b-a}{12}\boldsymbol{h^2y''}(\xi) \quad \xi\in[a,b]$, преузето из литературе [2])

За извођење трапезне формуле вршили смо поделу на x-оси.

Ако пак делимо y-осу на исти начин: $y_1-y_0 = y_2-y_1 = \cdots = y_n-y_{n-1} = h$ и користимо формулу (1) тада имамо:

$$2P_n = x_n(y_{n+1}-y_{n-1}) + x_{n+1}(y_{-1}-y_n) +x_{-1}(y_0-y_{n+1}) + x_0(y_1+y_{-1}) +\sum_{k=1}^{n-1} x_k(y_{k+1}-y_{k-1})$$

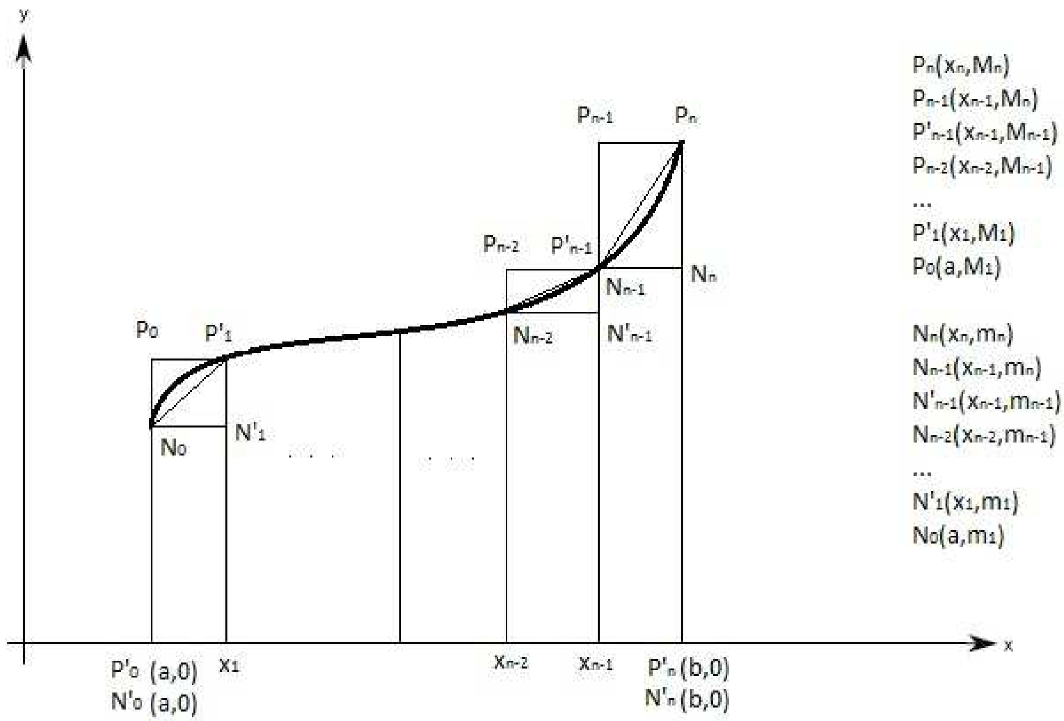
$$= a(0-y_{n-1}) + a(0-y_n) + b(y_0-0) + b(y_1-0) + \sum_{k=1}^{n-1} x_k\cdot 2h$$

$$= b(y_0+y_1) – a(y_{n-1}+y_n) + \sum_{k=1}^{n-1} x_k\cdot 2h.$$ Добијамо:

(8) $\boldsymbol{P_n}= \boldsymbol{b}\frac{y_0+y_1}{2}-\boldsymbol{a}\frac{y_{n-1}+y_n}{2}+\boldsymbol{h}\sum_{k=1}^{n-1}\boldsymbol{x_k}.$

6. ПОВРШИНА МНОГОУГЛА И ДАРБУОВЕ СУМЕ

Овде ћемо показати како се коришћењем формуле (2) може доћи до познатих израза Дарбуових сума.



Слика 13

Површина многоугла је дата формулом

а) $\boldsymbol{2P_n = -\sum_{k=1}^{n} y_k(x_{k+1}-x_{k-1}),\ x_0=x_n,\ x_{n+1}=x_1}$, или

б) $\mathbf{2P_n} = \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} x_k(y_{k+1}-y_{k-1}),\ y_0=y_n,\ y_{n+1}=y_1}$.

Ако формулу а) применимо на многоугао $P'_0P_0P'_1\ldots P_{n-2}P'_{n-1}P_{n-1}P_nP'_n$ са слике 13, где је x_0=a и $x_n=b$, добијамо:

$$2P_n = 0(x_n-x_0)-M_n(x_{n-1}-x_n)-M_n(x_{n-1}-x_n)-M_{n-1}(x_{n-2}-x_{n-1})-M_{n-1}(x_{n-2}-x_{n-1})-\cdots-M_2(x_1-x_2)-M_2(x_1-x_2)-M_1(x_0-x_1)-M_1(x_0-x_1)-0(x_n-x_0)$$
$$= -2M_n(x_{n-1}-x_n)-2M_{n-1}(x_{n-2}-x_{n-1})-\cdots-2M_2(x_1-x_2)-2M_1(0-x_1)$$
$$= 2(M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+\cdots+M_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-2})+M_n(x_n-x_{n-1})),$$ тј.

(9) $\boldsymbol{P_n = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1})}$ горња Дарбуова сума

Ако применимо формулу б) на многоугао са слике 13, где је $x_0 = a$ и $x_n = b$, добијамо:

$$2P_n = x_n(M_n-0)+x_n(M_n-0)+x_{n-1}(M_{n-1}-M_n)+x_{n-1}(M_{n-1}-M_n)+x_{n-2}(M_{n-2}-M_{n-1})+x_{n-2}(M_{n-2}-M_{n-1})+\cdots+x_2(M_2-M_3)+x_2(M_2-M_3)+x_1(M_1-M_2)+x_1(M_1-M_2)+x_0(0-M_1)+x_0(0-M_1)$$
$$= -2x_0M_1+2x_nM_{n-1}+x_1(M_2-M_1)-2x_2(M_3-M_2)-\cdots-2x_{n-1}(M_n-M_{n-1})$$

$= -2aM_1+2bM_n-2\sum_{k=1}^{n-1} x_k(M_{k+1}-M_k)$, тј.

(10) $\boldsymbol{2P_n = -2aM_1+2bM_n-2\sum_{k=1}^{n-1} x_k(M_{k+1}-M_k)}$.

Слично, ако за уписани многоугао $N'_0N_0N'_1\ldots N_{n-2}N'_{n-1}N_{n-1}N_nN'_n$ у претходним формулама $M_к$ заменимо са m_k добијамо формуле:

(11) $\boldsymbol{P_n = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})}$, доња Дарбуова сума

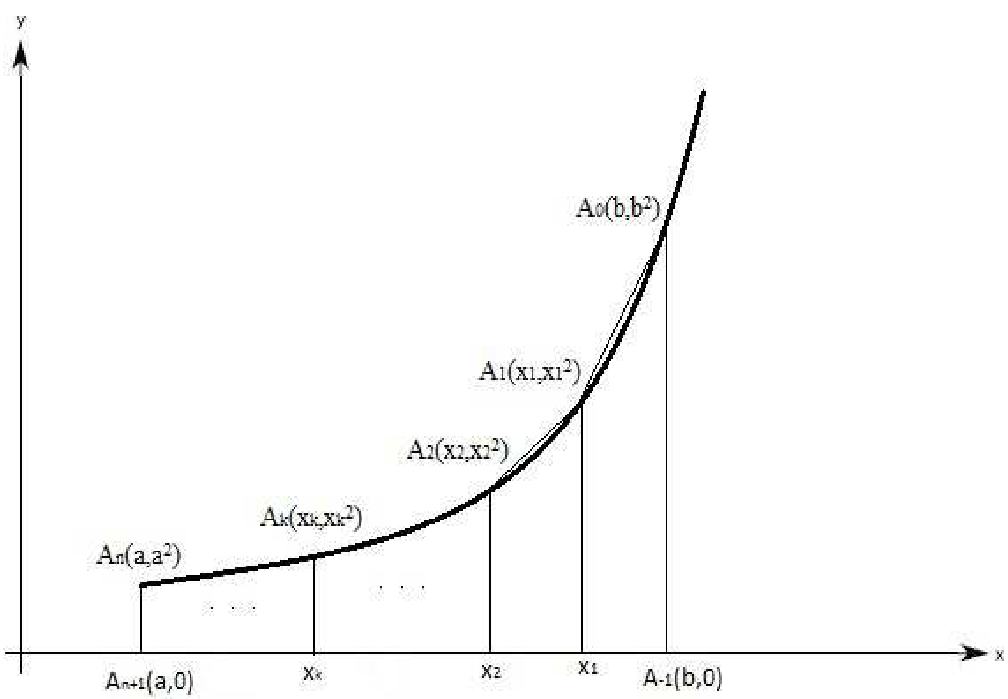
(12) $\boldsymbol{2P_n = -2am_1+2bm_n-2\sum_{k=1}^{n-1} x_k(m_{k+1}-m_k)}$.

7. НЕКОЛИКО ПРИМЕРА

У овим примерима показујемо да преласком на граничне вредности формула (5) и (6) добијамо површину криволинијског трапеза на сличан начин како се то ради у уџбеницима за израчунавање одређеног интеграла по дефиницији. Видети слику 14.

Пример 1) Наћи $\int_a^b x^2dx$ (ф-ја $y=x^2$)

Решење:



$x_k = b - \frac{k(b-a)}{n}$

Слика 14

а) $2P_n = x_n(y_{n+1}-y_{n-1})+x_{n+1}(y_{-1}-y_n)+x_{-1}(y_0-y_{n+1})+x_0(y_1-y_{-1})+\sum_{k=1}^{n-1} x_k(y_{k+1}-y_{k-1})$

$= a(0-(b-(n-1)\frac{b-a}{n})^2)+a(0-a^2)+b(b^2-0)+b((b-\frac{b-a}{n})^2-0)+\sum_{k=1}^{n-1}(b-k\frac{b-a}{n})((b-(k+1)\frac{b-a}{n})^2-(b-(k-1)\frac{b-a}{n})^2)$

$= -a(b^2-\frac{2b(n-1)(b-a)}{n}+\frac{(n-1)^2(b-a)^2}{n})-a^3+b^3+b(b^2-\frac{2b(b-a)}{n}+\frac{(b-a)^2}{n^2})+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{nb-kb+ka}{n}\cdot\frac{nb-kb+ka-b+a-nb+kb-ka-b+a}{n}\cdot\frac{nb-kb+ka-b+a+nb-kb+ka+b-a}{n}$

$= -a(b^2-\frac{2b(n-1)(b-a)}{n}+\frac{(n-1)^2(b-a)^2}{n})-a^3+b^3+b(b^2-\frac{2b(b-a)}{n}+\frac{(b-a)^2}{n^2})+$

$=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(nb-kb+ka)(-2)(b-a)(2nb-2kb+2ka).$

Означимо са:

$Z_n= -a(b^2-\frac{2b(n-1)(b-a)}{n}+\frac{(n-1)^2(b-a)^2}{n})-a^3+b^3+b(b^2-\frac{2b(b-a)}{n}+\frac{(b-a)^2}{n^2})$, и

$S_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(nb-kb+ka)(-2)(b-a)(2nb-2kb+2ka).$

Тада је:

$S_n =\frac{-4(b-a)}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(nb-kb+ka)^2$

$=\frac{-4(b-a)}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(n^2b^2-2nb^2k+k^2b^2+2nkab-2k^2ba+k^2a^2)$

$=\frac{-4(b-a)}{n^3}(b^2n^2(n-1)-2nb^2\frac{1}{2}(n-1)n+b^2\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+abn^2(n-1)-$

$-2ab\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+a^2\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)).$

(**Напомена:** $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$)

Дакле имамо: $2P_n=Z_n+S_n$. Нека је: $P=\lim_{n\to\infty} P_n$, $Z=\lim_{n\to\infty} Z_n$ и $S=\lim_{n\to\infty} S_n$

Добијамо да је: $Z = 2b^3-2a^3$ и $S = -\frac{4}{3}(b^3-a^3)$. Одатле следи да је:

$2P = Z+S = 2b^3-2a^3-\frac{4}{3}(b^3-a^3) = \frac{2}{3}(b^3-a^3)$, односно $P = \frac{1}{3}(b^3-a^3)$.

б) На сличан начин ако пођемо од формуле:

$-2P_n = y_n(x_{n+1}-x_{n-1})+y_{n+1}(x_{-1}-x_n)+y_{-1}(x_0-x_{n+1})+y_0(x_1-x_{-1})+\sum_{k=1}^{n-1} y_k(x_{k+1}-x_{k-1})$

имамо

$$-2P_n = a^2(a-(b-(n-1)\frac{b-a}{n}))+0(b-a)+0(b-a)+b^2((b-\frac{b-a}{n})-b)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}(b-k\frac{b-a}{n})^2(b-(k+1)\frac{b-a}{n} \ - \ b+(k-1)\frac{b-a}{n}).$$

Нека је

$$Z_n = a^2(a-(b-(n-1)\frac{b-a}{n}))+0(b-a)+0(b-a)+b^2((b-\frac{b-a}{n})-b), \text{ и}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1}(b-k\frac{b-a}{n})^2(b-(k+1)\frac{b-a}{n} \ - \ b+(k-1)\frac{b-a}{n}).$$

Тада је:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1}(\frac{nb-kb+ka}{n})^2\cdot\frac{-2(b-a)}{n} = \frac{-2(b-a)}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(nb-kb+ka)^2$$

$$Z = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Z_n} = a^2(a-(b-(b-a))) = a^2(a-a) = 0$$

$$S = \lim_{n\to\infty} \mathrm{S_n} = -\frac{2}{3}(b^3-a^3)$$

Даље имамо:

$$-2P = \lim_{n\to\infty}(-2P_n) = Z+S = 0 - \frac{2}{3}(b^3-a^3), \text{ односно}$$

$$P = \frac{1}{3}(b^3-a^3).$$

У следећем примеру показујемо како можемо вршити поделу на y-оси интервала $[y_n,y_0]$ и при том доћи до резултата који представља површину посматране фигуре. Видети слику 15.

Пример 2) Наћи $\int_a^b \sqrt{x}\,dx$ (ф-ја $y=\sqrt{x}$).

Решење:

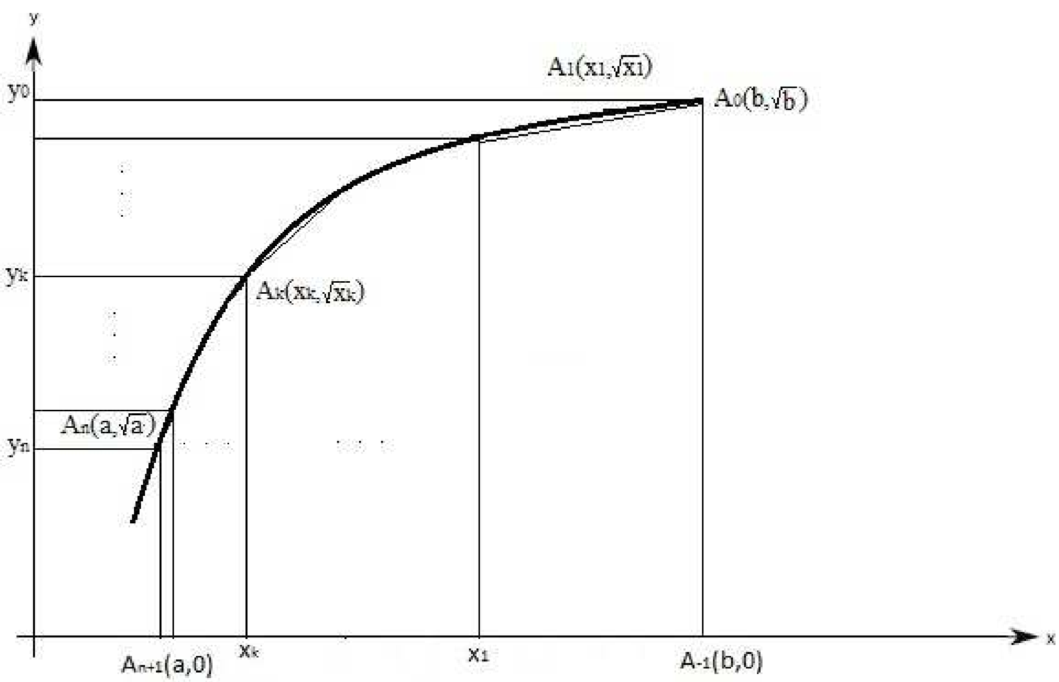
Нека је

$$y_k=y_0-\frac{k(y_0-y_n)}{n}=\sqrt{b}-\frac{k(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{n}=\frac{n\sqrt{b}-k\sqrt{b}+k\sqrt{a}}{n},$$

$$y_k=\sqrt{x_k},\ x_k=y^2_k,\ y_1=y_0-\frac{y_0-y_n}{n}.$$

Из обрасца за површину многоугла следи:

$$-2P_n = y_n(x_{n+1}-x_{n-1})+y_{n+1}(x_{-1}-x_n)+y_{-1}(x_0-x_{n+1})+y_0(x_1-x_{-1})+\sum_{k=1}^{n-1}y_k(x_{k+1}-x_{k-1}).$$



Слика 15

Имамо

$$-2P_n=\sqrt{a}\,(a-(\sqrt{b}-\frac{(n-1)(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{n}))+0(b-a)+0(b-a)+$$

$$+\sqrt{b}\,((\sqrt{b}-\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{n})^2-0)+\sum_{k=1}^{n-1}y_k(y^2_{k+1}-y^2_{k-1}).$$

Нека је:

$$Z_n=\sqrt{a}\,(a-(\sqrt{b}-\frac{(n-1)(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{n})^2)+0(b-a)+0(b-a)+\sqrt{b}\,((\sqrt{b}-\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{n})^2-b),$$

$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}y_k(y^2_{k+1}-y^2_{k-1})$. Тада је:

$$S_n=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(n\sqrt{b}-k\sqrt{b}+k\sqrt{a})((n\sqrt{b}-k\sqrt{b}-\sqrt{b}+k\sqrt{a}+\sqrt{a})^2-$$

$$-(n\sqrt{b}-k\sqrt{b}+\sqrt{b}+k\sqrt{a}-\sqrt{a})^2)$$

$$S_n=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(n\sqrt{b}-k\sqrt{b}+k\sqrt{a})(n\sqrt{b}-k\sqrt{b}-\sqrt{b}+k\sqrt{a}+\sqrt{a}-$$

$$-n\sqrt{b}+k\sqrt{b}-\sqrt{b}-k\sqrt{a}+\sqrt{a})\,(n\sqrt{b}-k\sqrt{b}-\sqrt{b}+k\sqrt{a}+\sqrt{a}\;+$$

$$+n\sqrt{b}-k\sqrt{b}-\sqrt{b}+k\sqrt{a}-\sqrt{a})$$

$$S_n=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(n\sqrt{b}-k\sqrt{b}+k\sqrt{a})(-2)(\sqrt{b}-\sqrt{a})(2n\sqrt{b}-2k\sqrt{b}+2k\sqrt{a})$$

$$S_n=-\frac{4(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(n^2b-2nbk+k^2b+2n\sqrt{a}\,\sqrt{b}\,k-2\sqrt{a}\,\sqrt{b}\,k^2+ak^2)$$

S_n=-$\frac{4(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}$ $(bn^2(n$-1)-b $2n\frac{(n-1)n}{2}$ +$b\frac{1}{6}(n$-1)$n(2n$-1)+

+2$\sqrt{a}$ $\sqrt{b}$ $n\frac{(n-1)n}{2}$ -2$\sqrt{a}$ $\sqrt{b}$ $\frac{1}{6}(n$-1)$n(2n$-1)+$a\frac{1}{6}(n$-1)$n(2n$-1))

S_n=-$\frac{4(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}$ $(b\frac{1}{6}(n$-1)$n(2n$-1)+2$\sqrt{a}$ $\sqrt{b}$ $n\frac{(n-1)n}{2}$ -

-2$\sqrt{a}$ $\sqrt{b}$ $\frac{1}{6}(n$-1)$n(2n$-1)+$a\frac{1}{6}(n$-1)$n(2n$-1)).

$S = \lim_{n\to\infty} S_n = -4(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\frac{1}{3}b+\sqrt{a}\sqrt{b}-\frac{2}{3}\sqrt{a}\sqrt{b}+\frac{1}{3}a)$

$= -4(\sqrt{a}-\sqrt{b})\frac{1}{3}(b+\sqrt{a}\sqrt{b}+a) = -\frac{4}{3}(\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3})$

$Z = \lim_{n\to\infty} Z_n = 0$

$-2P = \lim_{n\to\infty}(-2P_n) = \lim_{n\to\infty}(Z_n+S_n) = Z+S = 0 - \frac{4}{3}(\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3})$

$-2P = -\frac{4}{3}(\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3})$

$P = \frac{2}{3}(\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3})$.

Пример 3) Показати да важе једнакости $\sum_{k=0}^{n-1}\sin^2 k\alpha = \sum_{k=0}^{n-1}\cos^2 k\alpha = \frac{n}{2}$, где је $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, ($\alpha = \frac{360°}{n}$).

Решење:

Пођимо од формуле $P_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k(y_{k+1}-y_{k-1})$, где је $y_0=y_n$, $y_{n+1}=y_1$. Имамо:

$P_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(k-1)\alpha\ (\sin k\alpha-\sin(k-2)\alpha)$ (**Напомена:** $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$)

$P_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(k-1)\alpha\cdot 2\cos\frac{k\alpha+(k-2)\alpha}{2}\sin\frac{k\alpha-(k-2)\alpha}{2}$

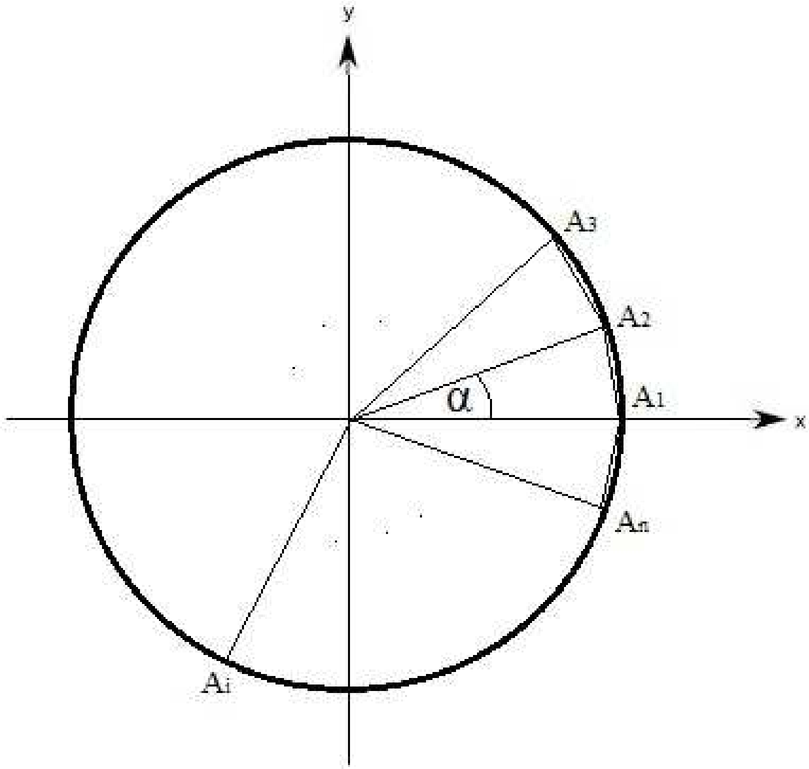
$P_n = \sum_{k=1}^{n}\cos(k-1)\alpha\cdot\cos\frac{k\alpha+(k-2)\alpha}{2}\sin\frac{k\alpha-(k-2)\alpha}{2}$

$P_n = \sum_{k=1}^{n}\cos(k-1)\alpha\cdot\cos\frac{2(k-1)\alpha}{2}\sin\alpha$

(a) $P_n = \sin\alpha\sum_{k=1}^{n}\cos^2(k-1)\alpha$.

С друге стране је:

(b) $P_n = n\cdot\frac{1\cdot\sin\alpha}{2}$.



r=1, $A_j(\cos(j\text{-}1)\ \alpha, \sin(j\text{-}1)\alpha)$, $\boldsymbol{\alpha}=\frac{2\pi}{n}$ $\left(\boldsymbol{\alpha}=\frac{360^0}{n}\right)$

Слика 16

Из (a) и (b) следи $\sin\alpha\sum_{k=1}^{n}\cos^2(k\text{-}1)\alpha= n\cdot\frac{1\cdot\sin\alpha}{2}$, а одатле, $\sum_{k=1}^{n}\cos^2(k\text{-}1)\alpha= \frac{n}{2}$, односно,

(13) $\sum_{k=0}^{n-1}\boldsymbol{\cos^2 k\alpha}=\frac{n}{2}$**,** где је $\boldsymbol{\alpha}=\frac{2\pi}{n}$ $\left(\boldsymbol{\alpha}=\frac{360^0}{n}\right)$.

Слично, ако пођемо од формуле:

$P_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}y_k(x_{k+1}\text{-}x_{k\text{-}1})$, где је $x_0=x_n$, $x_{n+1}=x_1$

Аналогно долазимо до формуле:

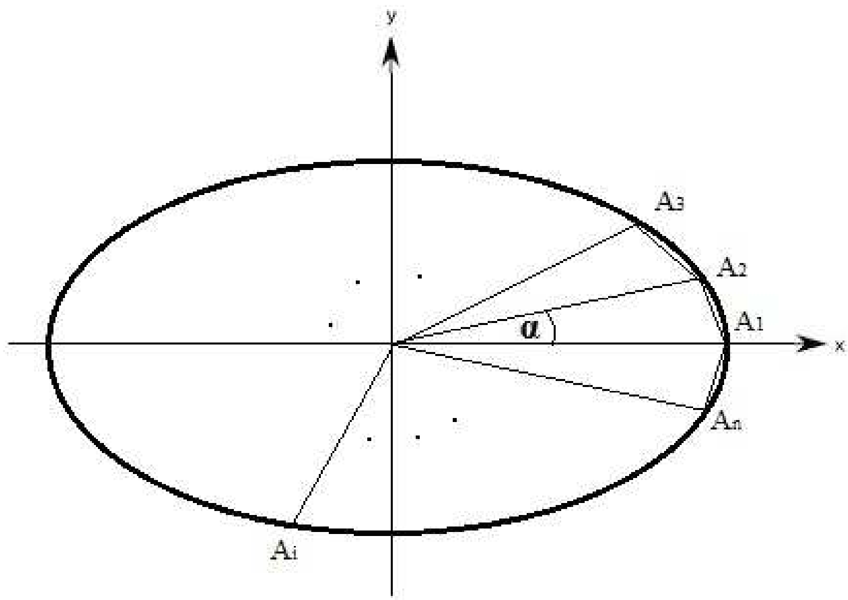
(14) $\sum_{k=0}^{n-1}\boldsymbol{\sin^2 k\alpha}=\frac{n}{2}$, где је $\boldsymbol{\alpha}=\frac{2\pi}{n}$ $\left(\boldsymbol{\alpha}=\frac{360^0}{n}\right)$

Једнакост (13) биће коришћена у примерима 4) и 6).

Пример 4) Израчунати површину елипсе $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$.

Решење:

Уведимо смене: $x=a\cos\alpha$, $y=b\sin\alpha$, где је $\alpha=\frac{2\pi}{n}$, $A_i(a\cos(j\text{-}1)\alpha, b\sin(j\text{-}1)\alpha)$.



Слика 17

Из формуле за површину многоугла $P_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k(y_{k+1}-y_{k-1})$, где је $y_0=y_n$, $y_{n+1}=y_1$, произилази

$$P_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a\cos(k-1)\alpha(b\sin k\alpha - b\sin(k-2)\alpha)$$

$$P_n = \frac{1}{2}ab\sum_{k=1}^{n}\cos(k-1)\alpha\cdot 2\cos(k-1)\alpha\,\sin\alpha$$

$$P_n = ab\sin\alpha\sum_{k=1}^{n}\cos^2(k-1)\alpha$$

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\left(ab\sin\alpha\sum_{k=1}^{n}\cos^2(k-1)\alpha\right)$$

$$= ab\lim_{n\to\infty}\left(\sin\alpha\sum_{k=1}^{n}\cos^2(k-1)\alpha\right) = ab\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{2\pi}{n}\frac{n}{2}\right) = ab\pi$$

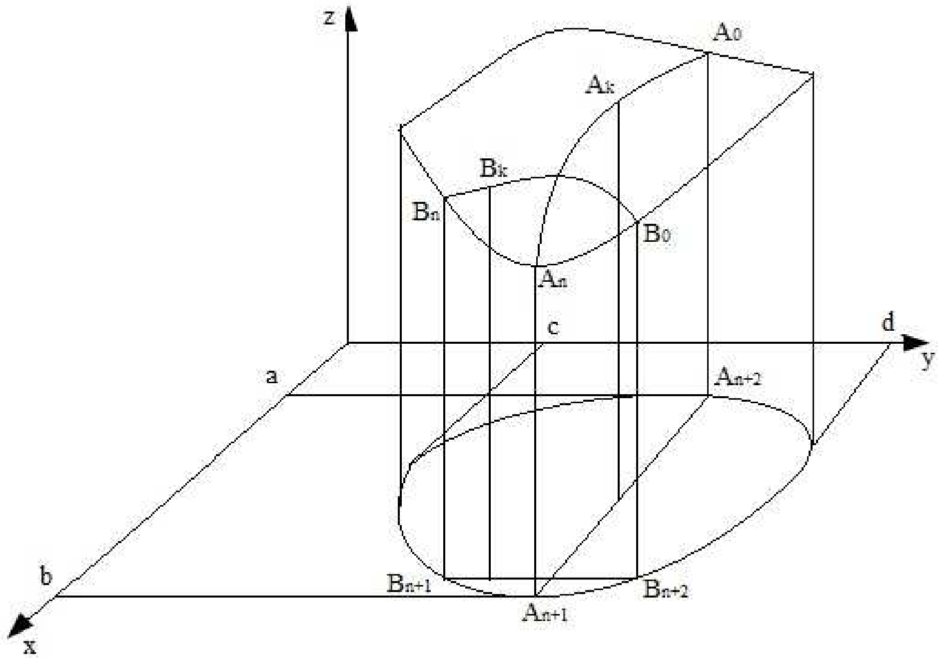
(**Напомена:** Коришћена је формула (13) и $\alpha=\frac{2\pi}{n}$)

8. ПРИМЕНА НА ВИШЕСТРУКЕ ИНТЕГРАЛЕ

Овде ћемо показати приближно израчунавање двоструког и троструког интеграла користећи њихове дефиниције и формулу (5).

8.1. Примена на двоструки интеграл

Претпоставићемо да је функција $z=z(x,y)$ интеграбилна у Римановом смислу (Литература[6] стр. 275-276 и 282-285; литература [7] стр. 200-207).



Слика 18

Имамо $P_n = \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{n+2} x_k(y_{k+1}-y_{k-1})$, где је $y_{n+3} = y_0$, $y_{0-1} = y_{n+2}$. Полазећи од наведене формуле и дефиниције двоструког интеграла имамо (види сл.18):

$$V = \iint_D z dx dy = \int_c^d \Big(\int_{\alpha_1(y)}^{\alpha_2(y)} z dx\Big) dy \approx$$

$$\int_c^d \Big[\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{n+2} x_k(z_{k+1}-z_{k-1})\Big]dy \approx \text{(где је: } z_k = z(x_k,y)\text{)} \approx$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=0}^{m+2} y_i\Big[\sum_{k=0}^{n+2} x_k(z_{k+1,i+1}-z_{k-1,i+1}) - \sum_{k=0}^{n+2} x_k(z_{k+1,i-1}-z_{k-1,i-1})\Big] =$$

$$\frac{1}{4}\cdot\sum_{i=0}^{m+2} y_i\Big[\sum_{k=0}^{n+2} x_k(z_{k+1,i+1}-z_{k-1,i+1}-z_{k+1,i-1}+z_{k-1,i-1})\Big] =$$

$$\frac{1}{4}\cdot\sum_{i=0}^{m+2}\sum_{k=0}^{n+2} y_i x_k(z_{k+1,i+1}-z_{k-1,i+1}-z_{k+1,i-1}+z_{k-1,i-1}).$$

(15) $$\mathbf{V} = \iint_D z dx dy \approx \frac{1}{4}\cdot\sum_{i=0}^{m+2}\sum_{k=0}^{n+2} \boldsymbol{y_i x_k(z_{k+1,i+1}-z_{k-1,i+1}-z_{k+1,i-1}+z_{k-1,i-1})}.$$

(**Напомена:** $z_{n+1,i}=z_{n+2,i}=z_{k,m+1}=z_{k,m+2}=0$, $(x_k,y_i)\in D$)

8.2. Примена на троструки интеграл

Овде ћемо претпоставити да је функција $z=z(x,y,u)$ интеграбилна у Римановом смислу (Литература [7], стр. 223-228).

Нека је: $z = z(x,y,u)$, $z_k = z(x_k,y,u)$, $z_{k,i} = z(x_k,y_i,u)$ и $z_{k,i,l} = (x_k,y_i,u_l)$. Тада имамо:

$$\mathrm{I} = \iiint\limits_D zdxdydu = \int\limits_e^f \Big(\int\limits_{\beta_1(u)}^{\beta_2(u)} \Big(\int\limits_{\alpha_1(u)}^{\alpha_2(u)} zdx\Big)dy\Big)du \approx$$

$$\int\limits_e^f \Big[\frac{1}{4}\cdot\sum_{i=0}^{m+2}\sum_{k=0}^{n+2} y_i x_k(z_{k+1,i+1}-z_{k-1,i+1}-z_{k+1,i-1}+z_{k-1,i-1})\Big]du \approx$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_{l=0}^{p+2} u_1\Big[\sum_{i=0}^{m+2}\sum_{k=0}^{n+2} y_i x_k(z_{k+1,i+1,l+1}-z_{k-1,i+1,l+1}-z_{k+1,i-1,l+1}+z_{k-1,i-1,l+1})-$$

$$-\sum_{i=0}^{m+2}\sum_{k=0}^{n+2} y_i x_k(z_{k+1,i+1,l-1}-z_{k-1,i+1,l-1}-z_{k+1,i-1,l-1}+z_{k-1,i-1,l-1})\Big] =$$

$$\frac{1}{8}\cdot\sum_{l=0}^{p+2}\sum_{i=0}^{m+2}\sum_{k=0}^{n+2} u_l y_i x_k(z_{k+1,i+1,l+1}-z_{k-1,i+1,l+1}-z_{k+1,i-1,l+1}+z_{k-1,i-1,l+1}-z_{k+1,i+1,l-1}+z_{k-1,i+1,l-1}+$$

$$+z_{k+1,i-1,l-1}-z_{k-1,i-1,l-1}).$$

(16) $$\boldsymbol{I=\iiint\limits_D zdxdydu \approx \frac{1}{8}\cdot\sum_{l=0}^{p+2}\sum_{i=0}^{m+2}\sum_{k=0}^{n+2} u_l y_i x_k(z_{k+1,i+1,l+1}-z_{k-1,i+1,l+1}-z_{k+1,i-1,l+1}+z_{k-1,i-1,l+1}-}$$

$$\boldsymbol{-z_{k+1,i+1,l-1}+z_{k-1,i+1,l-1}+z_{k+1,i-1,l-1}-z_{k-1,i-1,l-1}).}$$

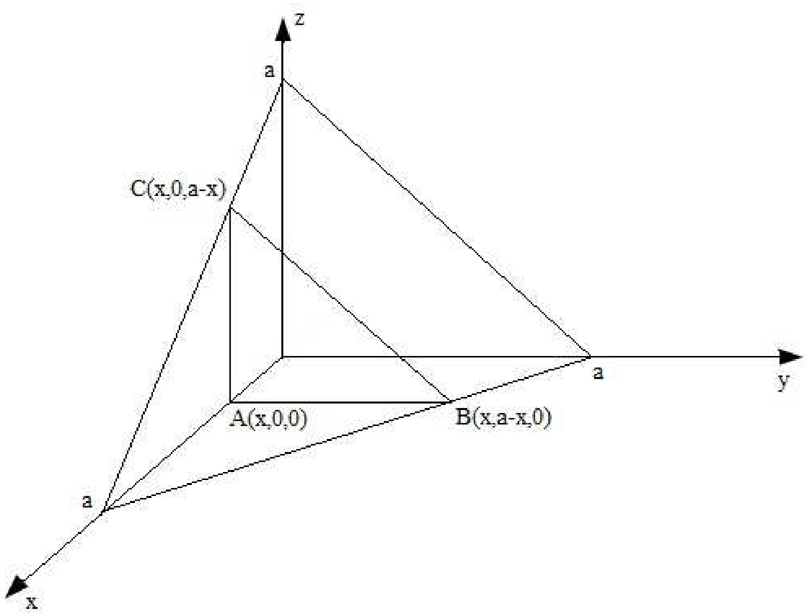
(Напомена: $z_{n+1,i,l} = z_{n+2,i,l} = z_{k,m+1,l} = z_{k,m+2,l} = z_{k,i,p+1} = z_{k,i,p+2} = 0$, $(x_k,y_i,u_l)\epsilon D$)

9. ПРИМЕРИ

У следећим примерима, користећи формуле (15) и (16) и преласком на граничну вредност, израчунаваћемо запремине неких тела.

Пример 5)

Наћи запремину тела омеђено са равни $x+y+z = a$ и координатним равнима.



Слика 19

Темена троугла ABC су одређена кординатама $A(x,0,0)$, $B(x,a\text{-}x,0)$, $C(x,0,a\text{-}x)$. Тада је:

$y_1,z_1 y_2, z_2 y_3,z_3$

$2P_{ABC} = y_1(z_2\text{-}z_3)+y_2(z_3\text{-}z_1)+y_3(z_1\text{-}z_2)$

$2P_{ABC} = 0(0\text{-}(a\text{-}x))+(a\text{-}x)((a\text{-}x)\text{-}0)+0(0\text{-}0)$

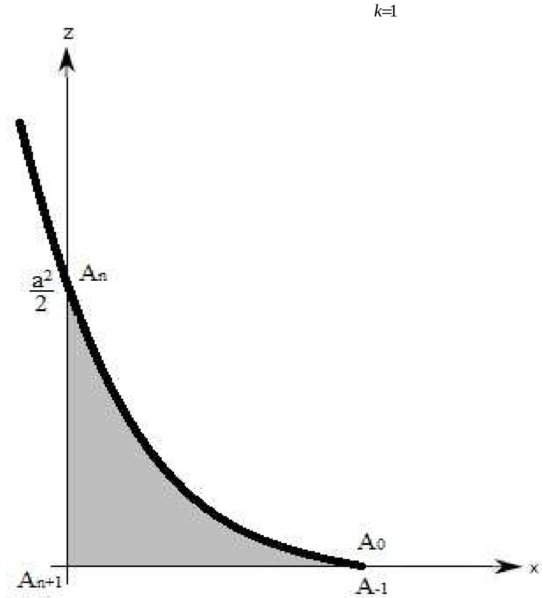
$2P_{ABC} = (a\text{-}x)(a\text{-}x)$

$$P_{ABC} = \frac{(a-x)^2}{2}.$$

Нека је $x_k = a\text{-}\frac{ka}{n} = a(1\text{-}\frac{k}{n})$. Тада имамо:

$$z_k = \frac{(a-a(1-\frac{k}{n}))^2}{2} = a^2\frac{k^2}{2n^2} \text{ и}$$

$$2V_n = x_n(z_{n+1}\text{-}z_{n-1})+x_{n+1}(z_{-1}\text{-}z_n)+x_{-1}(z_0\text{-}z_{n+1})+x_0(z_1\text{-}z_{-1})+\sum_{k=1}^{n-1} x_k(z_{k+1}\text{-}z_{k-1}),$$



Слика 20

$$2V_n=0(0\text{-}\frac{a^2(n-1)^2}{2n^2})+0(0\text{-}\frac{a^2}{2})+a(0\text{-}0)+a(\frac{a^2}{2n^2}\text{-}0)+\sum_{k=1}^{n-1} a(1\text{-}\frac{k}{n})(a^2\frac{(k+1)^2}{2n^2}\text{-}a^2\frac{(k-1)^2}{2n^2}).$$

Нека је:

$$Z_n = 0(0\text{-}\frac{a^2(n-1)^2}{2n^2})+0(0\text{-}\frac{a^2}{2})+a(0\text{-}0)+a(\frac{a^2}{2n^2}\text{-}0) \text{ и}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} a(1\text{-}\frac{k}{n})(a^2\frac{(k+1)^2}{2n^2}\text{-}a^2\frac{(k-1)^2}{2n^2}).$$

Тада је $Z = \lim\limits_{n\to\infty} Z_n = 0$ и

$$S_n = \frac{1}{2}a^3\sum_{k=1}^{n-1} (1\text{-}\frac{k}{n})(\frac{k+1}{n}\text{-}\frac{k-1}{n})(\frac{k+1}{n}+\frac{k-1}{n})$$

$$= \frac{1}{2}a^3\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n}\cdot\frac{k+1-k+1}{n}\cdot\frac{k+1+k-1}{n}$$

$=a^3\frac{1}{2n^3}\sum_{k=1}^{n-1}\ (n\text{-}k)2\cdot 2k = a^3\frac{1}{2n^3}\sum_{k=1}^{n-1}\ (nk\text{-}k^2)$

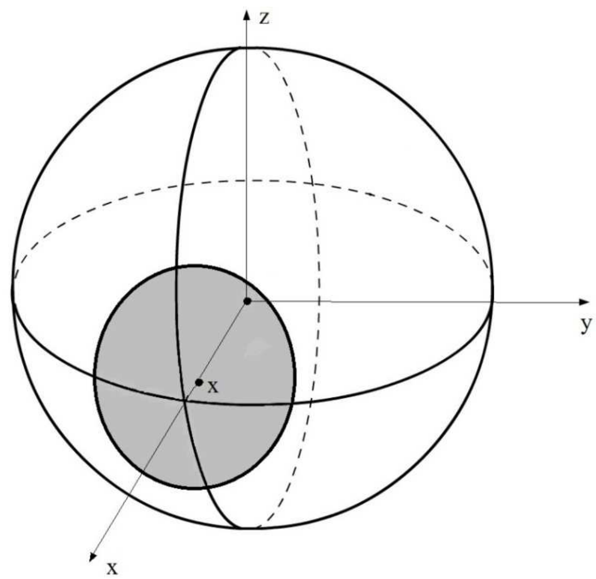
$=a^3\frac{1}{2n^3}\sum_{k=1}^{n-1}\ [\frac{1}{2}n^2(n\text{-}1) - \frac{1}{6}(n\text{-}1)n(2n\text{-}1)]$.

$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 2a^3(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}a^3$

$2V = \lim_{n\to\infty} V_n = Z+S = 0+\frac{1}{3}a^3$

$\mathrm{V} = \frac{1}{6}a^3$

Пример 6) Израчунати запремину лопте: $x^2+y^2+z^2 = r^2$.



Слика 21

Решење:

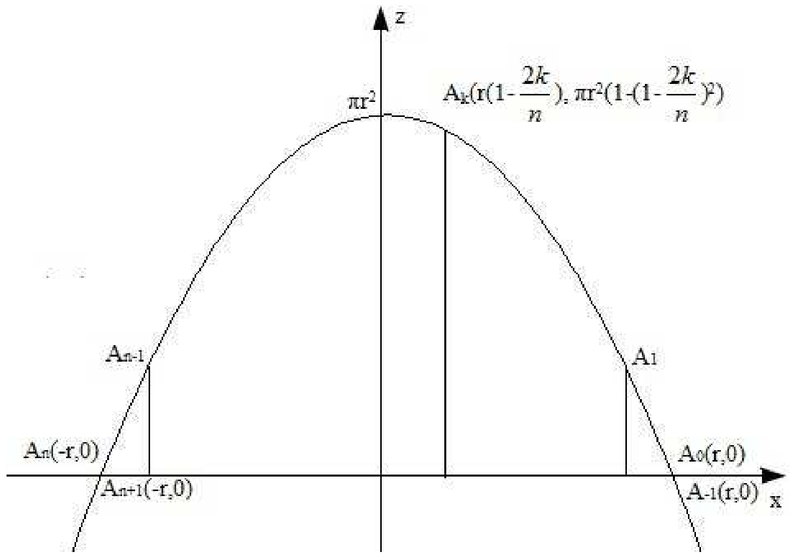
Имамо да је:

$$V = \iint_D z dxdy = \int_{-r}^{r}(\int_{-(r^2-x^2)}^{r^2-x^2}\sqrt{r^2-x^2-y^2}dy)dx.$$

$$\int_{-(r^2-x^2)}^{r^2-x^2}\sqrt{r^2-x^2-y^2}\ dy = \lim_{n\to\infty}\ [(r^2\text{-}x^2)\sin\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ \cos^2(j\text{-}1)\frac{2\pi}{n}\ ]=$$

(**Напомена:** пример 3) израз (а))

$= (r^2\text{-}x^2)\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\ \sin\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ \cos^2(j\text{-}1)\frac{2\pi}{n}\ = (r^2\text{-}x^2)\pi$. (према(13))



Слика 22

Користећи формуле за површину многоугла:

$2P_n = x_n(z_{n+1}-z_{n-1})+x_{n+1}(z_{-1}-z_n)+x_{-1}(z_0-z_{n+1})+x_0(z_1-z_{-1})+\sum_{k=1}^{n-1} x_k(z_{k+1}-z_{k-1})$, имаћемо:

$2V_n = x_n(z_{n+1}-z_{n-1})+x_{n+1}(z_{-1}-z_n)+x_{-1}(z_0-z_{n+1})+x_0(z_1-z_{-1})+\sum_{k=1}^{n-1} x_k(z_{k+1}-z_{k-1})$, односно

$(x_k = r(1-\frac{2k}{n}),\ z_k = \pi r^2(1-(1-\frac{2k}{n})^2)$

$$2V_n=-r(0-\pi r^2(1-(1-\frac{2(n-1)}{n})^2)-r(0-0)+r(0-0)+\pi r^2((1-(1-\frac{2}{n})^2)-0)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} r(1-\frac{2k}{n})[\pi r^2(1-(1-\frac{2(k+1)}{n})^2) -\pi r^2(1-(1-\frac{2(k-1)}{n})^2)]$$

$$=r^3\pi[1-1+\frac{4(n-1)}{n}-\frac{4(n-1)^2}{n^2}+1-1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}]+$$

$$+r^3\pi\sum_{k=1}^{n-1}(1-\frac{2k}{n})[1-1+\frac{4(k+1)}{n}-\frac{4(k+1)^2}{n^2}-1+1-\frac{4(k-1)}{n}+\frac{4(k-1)^2}{n^2}].$$

Нека је:

$$Z_n = r^3\pi[1-1+\frac{4(n-1)}{n}-\frac{4(n-1)^2}{n^2}+1-1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}] \text{ и}$$

$$S_n = r^3\pi\sum_{k=1}^{n-1}(1-\frac{2k}{n})[1-1+\frac{4(k+1)}{n}-\frac{4(k+1)^2}{n^2}-1+1-\frac{4(k-1)}{n}+\frac{4(k-1)^2}{n^2}].$$

Тада имамо: $Z = \lim\limits_{n\to\infty} Z_n = 0$ и

$$S_n=r^3\pi\sum_{k=1}^{n-1}(1-\frac{2k}{n})(\frac{4k+4-4k+4}{n}-\frac{-4k^2-8k-4+4k^2-8k+4}{n^2})$$

$$= r^3\pi\sum_{k=1}^{n-1} (1-\frac{2k}{n})(\frac{8}{n} - \frac{16k}{n^2}) = r^3\pi\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-2k}{n}\,\frac{8n-16k}{n^2}$$

$$= 8r^3\pi\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} (n\text{-}2k)^2 = 8r^3\pi\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} (n^2\text{-}4nk+4k^2)$$

$$= 8r^3\pi\frac{1}{n^3}[n^2(n\text{-}1)\text{-}4n\frac{(n-1)n}{2} +4\cdot\frac{1}{6}(n\text{-}1)n(2n\text{-}1)]$$

$$= 8r^3\pi\frac{1}{n^3}[\frac{2}{3}(n\text{-}1)n(2n\text{-}1) - n^2(n\text{-}1)].$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 8r^3\pi(\frac{4}{3} - 1) = \frac{8}{3}r^3\pi.$$

$$2V = Z + S = \frac{8}{3}r^3\pi$$

$$V = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

Овде смо показали како се може решити проблем користећи наведена разматрања иако се до истог резултата можемо доћи једноставније користећи класично интеграљење. Имамо $z = (r^2\text{-}x^2)\pi$ и користећи интеграле следи

$$\int_{-r}^{r} (r^2\text{-}x^2)\pi dx = \pi(r^2x\text{-}\frac{x^3}{3})\Big|_{-r}^{r} = \pi(r^3\text{-}\frac{r^3}{3}+r^3\text{-}\frac{r^3}{3}) = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

Претходно наведена разматрања и примери наводе нас на то да уз довољно ситну поделу интервала можемо израчунати довољно приближно интеграле који се ,,тешко” решавају на класичан начин или се не могу решити елементарним методама.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Др Кечкић Д. Јован, *МАТЕМАТИКА са збирком задатака за III разред средње школе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2003.

[2] Др Бертолино Милорад, *Нумеричка анализа*, Научна књига, Београд, 1977.

[3] Др Марјановић Мирослав, *Математичка анализа I*, Научна књига, Београд, 1983.

[4] Др Војводић Градимир, др Пауннић Ђура, др Тошић Ратко, *МАТЕМАТИКА са збирком задатака за III разред средње школе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1996.

[5] Др Кечкић Д. Јован, *МАТЕМАТИКА са збирком задатака за IV разред средње школе*, Издавачко предизеће НАУКА, Београд, 1990.

[6] Др Боричић Бранислав, др Ивовић Миодраг, *МАТЕМАТИКА*, Економски факултет, Београд 2004.

[7] Пејовић Т., *Математичка анализа III*, Грађевинска књига, Београд, 1972.